

PREPARACIÓN PARA LA FASE FINAL DE LA OME LXV

(Gerona, 26/29 de marzo de 2009)

PRIMERA y SEGUNDA SESIÓN

Departamento de Análisis Matemático (Universidad de Alicante)

7 y 14 de marzo de 2009

Prof. Juan Manuel Conde

1. C es un conjunto de n puntos en el plano. Tres cualesquiera de ellos no están alineados. Demostrar que existe un conjunto S en el plano formado por $2n-5$ puntos que satisface la siguiente condición: En el interior de cada triángulo cuyos tres vértices son elementos de C hay un punto de S .

2. En un triángulo ABC , sean D y E las intersecciones de las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ACB$ con los lados AC y AB respectivamente. Hallar los ángulos del triángulo dado $\angle A, \angle B$ y $\angle C$ si $\angle BDE = 24^\circ$ y $\angle CED = 18^\circ$.

3. Calcular $(\dots(((2*3)*4)*5)\dots)*2002$ donde se define la operación $*$ entre dos números reales positivos x e y del siguiente modo: $x*y = \frac{x+y}{1+xy}$.

4. Sea un $\triangle ABC$ triángulo escaleno. G, I y H respectivamente su baricentro, incentro y ortocentro. Demostrar que el ángulo $\angle GIH$ es obtuso.

5. Calcular $\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \dots}}}$ expresando el resultado en la forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$,

con a, b, c y d números enteros.

6. A, B y C denotan puntos distintos con coordenadas enteras en R^2 . Demostrar que si $(|AB| + |BC|)^2 < 8[ABC] + 1$, entonces A, B y C son vértices de un cuadrado.

$|XY|$ indica la longitud del segmento XY y $[ABC]$ el área del triángulo $\triangle ABC$.

7. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico (inscriptible en una circunferencia). Sean E y F puntos variables en los lados AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$. Sea

P un punto del segmento EF tal que $\frac{PE}{PF} = \frac{AB}{CD}$. Probar que la razón entre las áreas de los triángulos $\triangle APD$ y $\triangle BPC$ no depende de la elección de E y de F .

7. Sean x_1, x_2, \dots, x_n números reales mayores o iguales que 1. Probar que:

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n + 1}}.$$

8. Estudiar la existencia de funciones f del plano R^2 en si mismo, es decir de $f: R^2 \rightarrow R^2$, tales que para cualquier cuadrilátero convexo A, B, C, D , sus puntos imágenes $f(A), f(B), f(C)$ y $f(D)$ sean los vértices de un cuadrilátero cóncavo.

9. Probar que $\tan^2 1^\circ + \tan^2 3^\circ + \tan^2 5^\circ + \dots + \tan^2 89^\circ$ es un entero.

10. Hallar todos los números primos positivos p , para los que existen enteros positivos n, x, y tales que: $p^n = x^3 + y^3$.

11. En el interior o en los lados de un cuadrado de lado 6, están situados cuatro puntos A, B, C, D tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es mayor o igual que 5. Demostrar que estos cuatro puntos son vértices de un cuadrilátero convexo cuya área es mayor estrictamente que 21.

12. Probar que cada número racional positivo puede ser representado de la forma $\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$, con a, b, c y d enteros positivos.

13. Probar que un hexágono regular de lado dos unidades no puede ser cubierto por cinco círculos (discos) de radio unidad.

14. Probar que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y $a + b + c = 1$, entonces $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$.

15. Demostrar que para cualquier número entero positivo n , existen un par de enteros positivos x e y con $x > n$, tal que x^x divide a y^y , pero x no divide a y .

16. A cada punto del plano se le asocia un número real, de tal forma que para cualquier triángulo del plano el número asociado a su incentro es igual a la media aritmética de los números asociados a sus vértices. Probar entonces que a todos los puntos del plano se les asocia el mismo número.

17. Demostrar que $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ para todo x real.

18. Probar que para todo $a, b, c \geq 0$, $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$.

19. Probar que para todo $a, b, c, d \geq 0$, $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

20. Probar que para todo $a, b, c \geq 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

21. Probar que para $a, b, c > 0$, $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$.

22. Demostrar que para cualquier triángulo de lados a, b, c y de área S , se tiene que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

23. Sean x, y, z números reales tales que $2x + 3y + 7z = 14$. Determinar el mínimo valor de $w = x^2 + y^2 + z^2$.

24. Sean x, y, z números reales tales que $4x^2 + 5y^2 + 9z^2 = 100$. Determinar el máximo valor de $v = 2x + \sqrt{5}y + 3z$.

25. Sean a_1, a_2, \dots, a_n números reales y n un entero positivo tales que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

Probar que $a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 \geq n$.

26. Sean $x, y, z > 0$ y $x + y + z = 3$. Determinar el mínimo absoluto de $\Sigma = \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{x + z} + \frac{z^2}{x + y}$.

26. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ tales que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Probar que

$$\frac{x_1}{x_2(x_1 + x_2 + x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2 + x_3 + x_4)} + \dots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)} + \frac{x_{n-1}}{x_n(x_{n-1} + x_n + x_1)} + \frac{x_n}{x_1(x_n + x_1 + x_2)} \geq \frac{n^2}{3}.$$

27. Hallar enteros positivos n, k_1, k_2, \dots, k_n tales que

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 5n - 4 \quad \text{y} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$