

# XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

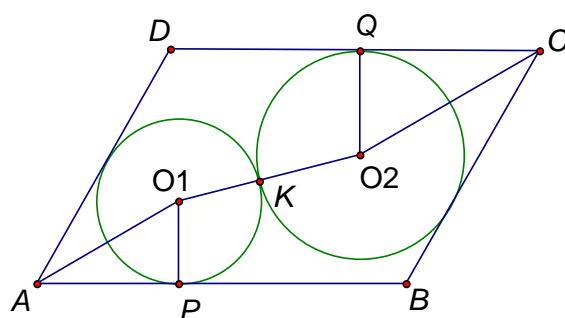
Sábado tarde, 24 de enero de 2008

## SOLUCIONES

4. En el interior de un paralelogramo  $ABCD$  se dibujan dos circunferencias. Una es tangente a los lados  $AB$  y  $AD$ , y la otra es tangente a los lados  $CD$  y  $CB$ . Probar que si estas circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia está en la diagonal  $AC$ .

**Solución:**

Veremos que los puntos  $A$ ,  $K$  y  $C$  están alineados, siendo  $K$  el punto de tangencia de las dos circunferencias, siendo  $K$  el punto de tangencia de las dos circunferencias.



Sean  $O_1$  y  $O_2$  los centros de la primera y segunda circunferencia, respectivamente. Nótese que  $AO_1$ , biseca el ángulo  $DAB$ , y análogamente  $CO_2$  biseca el ángulo  $DCB$ . Como los lados son paralelos dos a dos y los ángulos  $O_1AK$  y  $O_2CK$  son iguales, entonces  $AO_1$  es paralelo a  $CO_2$ , y, como  $O_1$ ,  $K$  y  $O_2$  están alineados, los ángulos  $AO_1K$  y  $KO_2C$  son iguales.

Como  $O_1P \perp AB$  y  $O_1Q \perp CD$ , los triángulos  $AP O_1$  y  $CQ O_2$  son semejantes, por lo que

$$\frac{|O_1A|}{|O_1P|} = \frac{|O_2C|}{|O_2Q|}, \text{ y como } |O_1P| = |O_1K| \text{ y } |O_2Q| = |O_2K|, \text{ los triángulos } AO_1K \text{ y } KO_2C \text{ son}$$

semejantes, por lo que los puntos  $A$ ,  $K$  y  $C$  están alineados.

5. Dado un número natural  $n$  mayor que 1, hallar todos los pares de números enteros  $a$  y  $b$  tales que las dos ecuaciones  $x^n + ax - 2008 = 0$  y  $x^n + bx - 2009 = 0$  tengan, al menos, una raíz común real.

**Solución:**

Restando ambas ecuaciones tenemos que  $(b - a)x = 1$ . Luego si estas ecuaciones van a tener una raíz común, tiene que ser  $x = 1/(b - a)$ . Notar que  $a$  no puede ser igual a  $b$ . Substituyendo en una de las ecuaciones, tendremos que

$$(b - a)^{n-1} (a - 2008(b - a)) = -1,$$

y que, por ser  $a$  y  $b$  enteros, estos dos factores serán uno igual a  $+1$  y otro igual a  $-1$ .

Si  $(b - a) = 1$ , se tendrá  $a = -1 + 2008 = 2007$ , y por tanto  $b = 2008$ .

Si  $(b - a) = -1$ , se tendrá  $a = (-1)^{n-1} - 2008$ , y por tanto  $b = (-1)^{n-1} - 2009$ .

Luego los únicos pares de números  $(a, b)$  son

$$(2007, 2008) \text{ y } ((-1)^{n-1} - 2008, (-1)^{n-1} - 2009).$$

6. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias exteriores tangentes en el punto  $P$ . Por un punto  $A$  de  $C_2$  trazamos dos rectas tangentes a  $C_1$  en los puntos  $M$  y  $M'$ . Sean  $N$  y  $N'$  los puntos respectivos de corte, distintos ambos de  $A$ , de estas rectas con  $C_2$ .

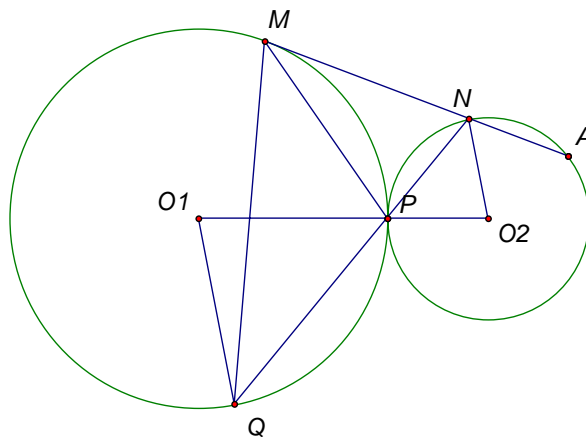
Probar que  $|PN'| \cdot |MN| = |PN| \cdot |M'N'|$ .

**Solución:**

Probaremos que para cualquier punto  $N$  de  $C_2$  distinto de  $P$  y un punto  $M$  de  $C_1$  tal que  $MN$  es tangente a  $C_1$ , se tiene que el cociente  $\frac{|MN|}{|PN|}$  es constante.

Sea  $Q$  el punto de corte con  $C_1$  de la recta por  $N$  y  $P$ . Los triángulos  $NMP$  y  $NQM$  son semejantes porque comparten el ángulo en  $N$  y  $\angle MQN = \angle MQP = \angle PMN$  por ser inscrito y semi-inscrito con cuerda  $MP$ . Por lo tanto  $\frac{|MN|}{|QN|} = \frac{|PN|}{|MN|}$ . (\*)

Siendo  $O_1$  y  $O_2$  los centros de  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, los triángulos isósceles  $PO_1Q$  y  $PO_2N$  son semejantes porque  $\angle O_1PQ = \angle O_2PN$ .



De aquí se sigue que  $\frac{|QP|}{|PN|} = \frac{|O_1P|}{|O_2P|} = \frac{r_1}{r_2} = \lambda > 0$ , siendo  $r_1$  y  $r_2$  los respectivos radios de

$C_1$  y  $C_2$ . Como  $|QN| = |QP| + |PN| = |PN| (1 + \lambda)$ , substituyendo en (\*) tenemos que

$|MN|^2 = |PN|^2 (1 + \lambda)$ , de donde  $\frac{|MN|}{|PN|} = \sqrt{1 + \lambda}$ , como se requería.