XLVI Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2010 (Valladolid)
Segunda sesión (27 de marzo)

Problema 4

Sean a, b, c tres números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\geq\frac{15}{8}.$$

Problema 5

Sea P un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC, y sean A', B', C' puntos respectivos de las rectas BC, CA, AB, tales que PA' es perpendicular a BC, PB' es perpendicular a CA y PC' es perpendicular a AB. Demuestra que PA' y $B'C'$ se cortan sobre la mediana AM, siendo M el punto medio de BC.

Problema 6

Sea p un número primo y A un subconjunto infinito de los números naturales. Sea $f_A(n)$ el número de soluciones distintas de la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$, con $x_1, x_2, ..., x_p \in A$. ¿Existe algún número natural N tal que $f_A(n)$ sea constante para todo $n > N$?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.