

PROBLEMAS DE PREPARACIÓN PARA LA FASE NACIONAL
DE LA XLVI OME (Valladolid, 25-28 de marzo de 2010)
Profesor Juan Manuel Conde
Departamento de Análisis Matemático. Facultad de Ciencias
Universidad de Alicante, 6 y 20 de marzo de 2010

1. Determina todos los números reales A, B y C , tales que existe una función real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $f(x + f(y)) = Ax + By + C$ para todos los números reales x e y .

2. Se escribe el número 10^{2010} en una pizarra. Andrés y Berta participan en un juego donde cada jugador en su correspondiente turno puede hacer una de las dos siguientes operaciones:

a) Sustituir un número x en la pizarra por dos números enteros a y b , ambos mayores que 1, tales que $x = ab$.

b) Borrar uno o dos números de la pizarra que sean iguales.

El jugador que no es capaz de realizar una de las dos operaciones en su turno pierde.

Andrés comienza el juego. ¿Quién de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora?

3. La diferencia entre los cubos de dos enteros positivos consecutivos es un cuadrado n^2 , donde n es un entero positivo. Prueba que n es la suma de dos cuadrados.

4. Sea ABC un triángulo y sean D y E puntos que están respectivamente en los lados BC y CA , tales que AD y BE son bisectrices interiores del triángulo ABC . Sean F y G los puntos de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , tales que AF y DE son paralelos y también FG y BC son paralelos. Demuestra que

$$\frac{AG}{BG} = \frac{BA + AC}{AB + BC}.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0$ para todos los números reales x, y, z . Demuestra que existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x) - g(y)$ para todos los números reales x e y .

6. Para ciertos pares (m, n) de enteros positivos m y n siendo $m \geq n$, hay exactamente 50 enteros positivos k tales que $|\log m - \log k| < \log n$. Calcula la suma de todos los posibles valores de los productos mn .

7. Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera una cuerda CD de longitud fija c . Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC . Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante.

8. ¿Cuál es el número máximo de *puntos racionales* que están en una circunferencia del plano con centro un *punto no racional*?

NOTA: Un *punto racional* en el plano es un punto en el que su abscisa y su ordenada son números racionales.

9. Se considera un punto interior P de un triángulo arbitrario. Se trazan tres rectas que pasando por P son paralelas a los lados del triángulo y dividen a éste en tres paralelogramos y tres triángulos menores. Sea r la razón entre la suma de las áreas de estos tres triángulos y el área del triángulo inicial. Demuestra que $r \geq \frac{1}{3}$ y determina los

puntos para los que $r = \frac{1}{3}$.

10. Sea la sucesión finita formada por 31 números primos, p_1, p_2, \dots, p_{31} , con $p_1 < p_2 < \dots < p_{31}$.

Prueba que si 30 divide a $S = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{31}^4$, existen, al menos, tres primos consecutivos en esta sucesión.

11. En el triángulo ABC , $AC = 450$ y $BC = 300$. Los puntos K y L están situados respectivamente en los lados AC y AB tales que $AK = CK$ y CL es la bisectriz interior del ángulo C . Sea P la intersección de BK y CL y sea M el punto para el que K es el punto medio de PM . Si $AM = 180$, calcula la longitud de LP .

12. a) Prueba que si $0 \leq x, y \leq 1$, entonces $\frac{1}{x+y+1} \leq 1 - \frac{x+y}{2} + \frac{xy}{3}$.

b) Prueba que $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$,
donde $0 \leq a, b, c \leq 1$.

13. Una galería de arte tiene forma de polígono plano simple, cóncavo o convexo. Halla el mínimo número de guardias necesarios para vigilar la galería.

14. En el triángulo ABC , $AB = 10$, $BC = 14$ y $CA = 16$. Sea D un punto en el interior del lado BC . Consideremos los incentros I_B e I_C de los triángulos ABD y ACD respectivamente. Las circunferencias circunscritas a los triángulos BI_BD y CI_CD se intersecan en puntos distintos P y D . El área máxima del triángulo BPC puede expresarse de la forma $a - b\sqrt{c}$, siendo a, b y c enteros positivos y c no divisible por el cuadrado de ningún primo. Halla $a + b + c$.

15. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prueba que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

16. Halla todas las ternas (x, y, z) de números naturales (enteros positivos) tales que y es primo y 3 e y no dividen a z y $x^3 - y^3 = z^2$.

17. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de cuyo centro O , está en el interior del cuadrilátero dado. Sea $MNPQ$ el cuadrilátero cuyos vértices son las proyecciones del punto de intersección de las diagonales AC y BD sobre los lados de $ABCD$. Demuestra que $2[MNPQ] \leq [ABCD]$.

18. Determina el valor máximo de λ tal que si $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b, c números reales, es un polinomio cúbico con todas sus raíces no negativas, entonces $f(x) \geq \lambda(x-a)^3$. Halla la condición de igualdad.

19. ¿Para qué triángulos acutángulos la razón entre el lado más corto y el radio de la circunferencia inscrita es máxima?

20. Encuentra todas las funciones $f : (1, \infty) \rightarrow R$, tales que

$$f(x) - f(y) = (y-x)f(xy)$$

para todos los números reales $x, y > 1$.