SOLUCIONES OFICIALES DE LA XLVI OME
Valladolid, marzo de 2010

PROBLEMA 1

Una sucesión pucelana *es una sucesión creciente de dieciséis números impares positivos consecutivos, cuya suma es un cubo perfecto. ¿Cuántas sucesiones* pucelanas *tienen solamente números de tres cifras?*

Solución:

Sea la sucesión $n, n+2, ..., n+30$. Entonces la suma es $\frac{1}{2}16(2n+30) = 8(2n+30)$. Por tanto, necesariamente, $2n+30$ sea cubo perfecto. Ahora hay que contar el número de tales n que son impares y verifican $101 \le n \le 969$. Los cubos pares entre 232 y 1968 son 512, 1000 y 1728, que corresponden a valores de n de 241, 485 y 849. Por lo tanto hay exactamente tres sucesiones *pucelanas.*

PROBLEMA 2

Sean N_0 y Z el conjunto de todos los enteros no negativos y el conjunto de todos los enteros, respectivamente. Sea $f : N_0 \to Z$ la función que a cada elemento n de N_0 le asocia como imagen el entero $f(n)$ *definido por*

$$f(n) = -f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) - 3\left\{\frac{n}{3}\right\},$$

donde $\lfloor X \rfloor$ es la parte entera del número real X y $\{X\} = X - \lfloor X \rfloor$ su parte decimal. Determina el menor entero n tal que $f(n) = 2010$.

NOTA: La parte entera de un número real x, denotada por $\lfloor X \rfloor$ es el mayor entero que no supera a x. Así $\lfloor 1{,}98 \rfloor = 1, \quad \lfloor -2{,}001 \rfloor = -3, \quad \lfloor 7\pi - 8{,}03 \rfloor = 13.$

Solución:

Se prueba fácilmente por inducción que, si $n = \left(\overline{a_k a_{k-1} ... a_0}\right)_3$, entonces

$$f(n) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impar}}}^{k} a_j - \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^{k} a_j .$$

En efecto, $f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = -2$.

Supongamos que, para todo n menor que $3t$, $f(n) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impar}}}^{k} a_j - \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^{k} a_j$.

Entonces, si $t = \left(\overline{b_k ....b_0}\right)_3, 3t = \left(\overline{b_k ....b_0 0}\right)_3, 3t+1 = \left(\overline{b_k ....b_0 1}\right)_3, 3t+2 = \left(\overline{b_k ....b_0 2}\right)_3$. Por lo tanto, como $f(3t) = -f(t), f(3t+1) = -f(t) - 1, f(3t+2) = -f(t) - 2$, la propiedad sigue siendo cierta para todo entero n menor que $3t+2$.

Luego, para todo $n = \left(\overline{a_k a_{k-1} ... a_0}\right)_3$, $f(n) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impar}}}^{k} a_j - \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^{k} a_j$.

De esta forma, se obtiene el menor $n = \left(\overline{2020...20}\right)_3$ tal que $f(n) = 2010$. Este número contiene 1005 doses; su valor en base decimal es: $3 \cdot \frac{3^{2010} - 1}{4}$.

Solución alternativa:

Para cualquier entero positivo n, podemos escribir $n=9a+3b+c$, donde a es un entero no negativo y b y c toman valores 0, 1 ó 2. Se tiene entonces que

$$f(n)=f(9a+3b+c)=-f(3a+b)-3\cdot\frac{c}{3}=-\left(-f(a)-3\cdot\frac{b}{3}\right)-c=f(a)+b-c\,.$$

Es entonces claro que $f(9^a+3b+c)=f(9^a+r)\leq f(a)+2$, para $0\leq r\leq 8$, con igualdad si y sólo si $b=2$ y $c=0$, es decir, si y sólo si $r=6$. Además, haciendo $a=b=c=0$, obtenemos de la segunda igualdad que $f(0)=-f(0)-0$, es decir, $f(0)=0$. Haciendo $a=0$ y utilizando el anterior resultado, obtenemos que $f(3b+c)=b-c$ para cualesquiera b y c con valores 0, 1 ó 2. Luego si $n<9$, el valor máximo que toma $f(n)$ es 2, cuando $n=6$.

Demostraremos ahora por inducción sobre k que el valor máximo que toma $f(n)$ para $n<9^k$ es $2k$, con igualdad si y sólo si $n=6\,(1+9+9^2+...+9^{k-1})$. La hipótesis de inducción ha sido ya probada para $k=1$. Si la hipótesis de inducción es cierta para $k-1$, entonces para cualquier $9^k>n\geq 9^{k-1}$ se tiene que

$$f(n)\leq f(a)+2\leq 2(k-1)+2=2k\,,$$

donde $9^{k-1}>a\geq 9^{k-2}$,y se da la igualdad si y sólo si $n=9a+6$, y además $a=6\,(1+9+9^2+...+9^{k-2})$, es decir, si y sólo si $n=6(1+9+9^2+...+9^{k-1})$, con lo que queda probada la hipótesis de inducción. Luego para cualquier $n<3^{2010}$, se tiene que $f(n)\leq 2010$, con la igualdad si y sólo si $n=6\,(1+9+9^2+...+9^{1004})$, es decir, el único número menor que 3^{2010} tal que $f(n)=2010$, y por lo tanto el menor número tal que $f(n)=2010$, es

$$6\left(1+9+9^2+...+9^{1004}\right)=6\,\frac{9^{1005}-1}{9-1}=\frac{3^{2011}-3}{4}\,.$$

PROBLEMA 3

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea P la intersección de AC y BD. El ángulo $\angle APD=60^{\circ}$. Sean E,F,G y H los puntos medios de los lados AB,BC,CD y DA respectivamente. Halla el mayor número real positivo k tal que

$$EG+3HF\geq kd+(1-k)s,$$

siendo s es el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ y d la suma de las longitudes de sus diagonales. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución:

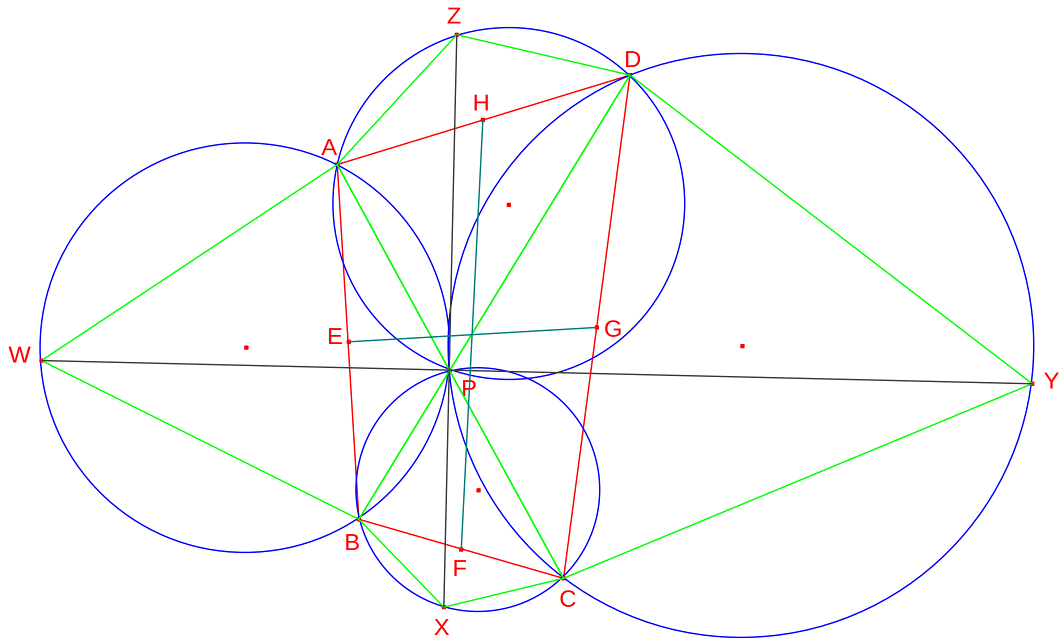
Probaremos que $k=1+\sqrt{3}$ y que la igualdad se da si, y sólo si, *ABCD* es un rectángulo.

Sean *W*, *X*, *Y y Z* cuatro puntos exteriores a *ABCD* tales que:

**ABW* y *DCY* son equiláteros.

**BCX* es isósceles en *X* y $\angle BXC=120^{\circ}$.

**AZD* es isósceles en *Z* y $\angle AZD=120^{\circ}$.



Los cuadriláteros $WAPB$, $XBPC$, $YCPD$ y $ZDPA$ son cíclicos.
Luego por el teorema de Ptolomeo, se obtiene que:

$$WP = PA + PB$$

$$XP\sqrt{3} = PB + PC$$

$$YP = PC + PD$$

$$ZP\sqrt{3} = PD + PA$$

Por otro lado, $\angle WPY = \angle WPB + 60^{o} + \angle CPY = \angle WAB + \angle 60^{o} + \angle CPY = 180^{o}$.
Luego W, P, Y están alineados.
De forma análoga, Z, P, X están alineados.
Luego:

$$WY = WP + PY = PA + PB + PC + PD = AC + BD$$

$$XZ = XP + PZ = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(PA + PB + PC + PD\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(AC + BD\right)$$

Por la desigualdad, triangular:

$$WY \leq WE + EG + GY$$

$$XZ \leq XF + FH + HZ$$

Luego:

$$AC + BD \leq AB\frac{\sqrt{3}}{2} + EG + DC\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(AC + BD\right) \leq \frac{BC}{2\sqrt{3}} + FH + \frac{AD}{2\sqrt{3}}$$

Por lo tanto,

$$AC+BD\le AB\frac{\sqrt{3}}{2}+EG+DC\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sqrt{3}\left(AC+BD\right)\le \frac{BC\sqrt{3}}{2}+3FH+\frac{AD\sqrt{3}}{2}$$
$$\left(1+\sqrt{3}\right)\left(AC+BD\right)\le EG+3FH+s\sqrt{3}$$
$$EG+3FH\ge \left(1+\sqrt{3}\right)\left(AC+BD\right)-s\sqrt{3}$$
Luego, si $k=1+\sqrt{3}$, entonces: $EG+3HF\ge kd+\left(1-k\right)s$.
La igualdad se dará si, y sólo si:
*por un lado, *W, E, G, Y* están alineados.
*por otro lado, *X, F, H, Z* están alineados.
Como *WE* es perpendicular a *AB* y *GY* es perpendicular a *DC, AB y DC* deben ser paralelas. De forma análoga, *BC* y *AD* deben ser paralelas.
Luego *ABCD* debe ser un paralelogramo.
Además, la recta *EG* es perpendicular a *DC*, lo que implica que *ABCD* es un rectángulo.
Se comprueba fácilmente que si *ABCD* es un rectángulo, entonces se da la igualdad.
Luego, la igualdad se da si, y sólo si, *ABCD* es un rectángulo.
Ahora, sea un real positivo *l* tal que $EG+3HF\ge ld+\left(1-l\right)s$.
Entonces, si ABCD es un rectángulo,
$$kd+\left(1-k\right)s\ge ld+\left(1-l\right)s$$
$$k\left(d-s\right)\ge l\left(d-s\right)$$
Pero la desigualdad triangular implica que $d>s$, lo que implica que $k\ge l$.
Luego el real buscado es $k=1+\sqrt{3}$ y la igualdad se da si, y sólo si, *ABCD* es un rectángulo.

Solución alternativa:
Elegimos un sistema de coordenadas con centro en *P*, y de forma que *PA* forma un ángulo de 30° con el semieje positivo de abscisas. Se tiene entonces que las coordenadas de los puntos que participan en el problema son
$$A\equiv\left(\frac{t\sqrt{3}}{2},\frac{t}{2}\right),\qquad B\equiv\left(-\frac{u\sqrt{3}}{2},\frac{u}{2}\right),\qquad C\equiv\left(-\frac{v\sqrt{3}}{2},-\frac{v}{2}\right),\qquad D\equiv\left(\frac{w\sqrt{3}}{2},-\frac{w}{2}\right),$$
$$E\equiv\left(\frac{(t-u)\sqrt{3}}{4},\frac{t+u}{4}\right),\qquad F\equiv\left(-\frac{(u+v)\sqrt{3}}{4},\frac{u-v}{4}\right),$$
$$G\equiv\left(-\frac{(v-w)\sqrt{3}}{4},-\frac{v+w}{4}\right),\qquad H\equiv\left(\frac{(w+t)\sqrt{3}}{4},-\frac{w-t}{4}\right),$$
donde *PA*=*t*, *PB*=*u*, *PC*=*v* y *PD*=*w*. Obtenemos entonces a partir de aquí que
$$d=t+u+v+w,\ t+u>AB=\frac{\sqrt{3(t+u)^2+(t-u)^2}}{2}\ge\frac{(t+u)\sqrt{3}}{2},$$
con igualdad en la segunda desigualdad si y sólo si *t*=*u* (la primera desigualdad es siempre estricta pues en caso contrario sería *tu*=0, es decir, el cuadrilátero sería un triángulo). De forma similar,
$$u+v>BC\ge\frac{u+v}{2},\ v+w>CD\ge\frac{(v+w)\sqrt{3}}{2},\ w+t>DA\ge\frac{w+t}{2},$$
llegándose entonces a que

$$d > s \geq d\,\frac{\sqrt{3}+1}{4},$$
siendo la primera desigualdad siempre estricta, y con igualdad en la segunda si y sólo si *t*=*u*=*v*=*w*, es decir, si y sólo si *ABCD* es un rectángulo. Deducimos de aquí inmediatamente que
$$kd + (1-k)s \leq d\ .$$
Además,
$$EG = \frac{\sqrt{3(t-u+v-w)^2 + (t+u+v+w)^2}}{4} \geq \frac{d}{4},$$
$$HF = \frac{\sqrt{3(t+u+v+w)^2 + (t-u+v-w)^2}}{4} \geq \frac{d\sqrt{3}}{4}.$$
Se tiene entonces que
$$EG + 3HF \geq d\,\frac{3\sqrt{3}+1}{4} > d\ ,$$
con igualdad si y sólo si *t*+*v*=*u*+*w*, es decir, si y sólo si ambas diagonales tienen la misma longitud. Ahora bien, si $k \leq 1$,
$$kd + (1-k)s < kd + (1-k)d = d < EG + 3HF\ ,$$
con lo que la desigualdad propuesta es cierta siempre, y además estricta. Nos basta entonces considerar los casos en los que $k>1$. Pero entonces, podemos escribir que
$$\frac{EG + 3HF + (k-1)s}{d} \geq \frac{3\sqrt{3}+1}{4} + (k-1)\frac{\sqrt{3}+1}{4},$$
con igualdad si y sólo si *ABCD* es un rectángulo, y para que se cumpla la desigualdad propuesta, nos basta con tomar
$$\frac{3\sqrt{3}+1}{4} + (k-1)\frac{\sqrt{3}+1}{4} \geq k\ ; \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \geq k\,\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \qquad k \leq \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1\,.$$
Nótese que, si k es mayor que este valor, y el cuadrilátero es un rectángulo, no se cumpliría la desigualdad propuesta. Luego el valor de *k* buscado es $\sqrt{3}+1$.

PROBLEMA 4

Sean a, b, c *tres números reales positivos. Demuestra que*
$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} + \frac{a+3b+c}{3a+2b+3c} + \frac{3a+b+c}{2a+3b+3c} \geq \frac{15}{8}.$$

Solución:
Haciendo $a = x_1, b = x_2, c = x_3$ y llamando $s = x_1 + x_2 + x_3$, resulta que el lado izquierdo de la desigualdad se escribe como
$$S = \frac{s+2x_1}{3s-x_1} + \frac{s+2x_2}{3s-x_2} + \frac{s+2x_3}{3s-x_3}.$$
Por otro lado, $S + 6 = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{s+2x_k}{3s-x_k} + 2\right) = \sum_{k=1}^{3}\frac{7s}{3s-x_k},\quad k = 1,2,3,$ con lo que
$$S + 6 = \frac{7s}{3s-x_1} + \frac{7s}{3s-x_2} + \frac{7s}{3s-x_3} = 7s\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{3s-x_k}.$$

Dado que $\sum_{k=1}^{3}(3s - x_k) = 8s,$ entonces $s = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{3}(3s - x_k),$ y

$$S + 6 = \frac{7}{8}\left(\sum_{k=1}^{3}(3s - x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{3s - x_k}\right) \geq \frac{63}{8}$$

de donde resulta que

$$S = \frac{s + 2x_1}{3s - x_1} + \frac{s + 2x_2}{3s - x_2} + \frac{s + 2x_3}{3s - x_3} \geq \frac{63}{8} - 16 = \frac{15}{8}.$$

La igualdad tiene lugar cuando $x_1 = x_2 = x_3$. Es decir, cuando $a = b = c$.

PROBLEMA 5

Sea P un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC, y sean A', B', C' puntos respectivos de las rectas BC, CA, AB, tales que PA' es perpendicular a BC, PB' es perpendicular a CA y PC' es perpendicular a AB. Demuestra que PA' y $B'C'$ se cortan sobre la mediana AM, siendo M el punto medio de BC.

Solución:

Sea *E* el punto de intersección de *PA’* y *B’C’*. Si *P* se mueve sobre la bisectriz *AI* (*I* el incentro), la figura *PB’C’E* es homotética de sí misma con respecto al punto *A*. Luego *E* describe una recta que pasa por *A*. La bisectriz *AI* corta a la circunferencia circunscrita a *ABC* en *F*, que se proyecta en el punto medio A_m de *BC*; si *P* = *F*, la recta *B’C’* es la recta de Simson de *F*, luego el lugar geométrico de *E* es la mediana AA_m.

Solución alternativa:

El cuadrilátero $AB'PC'$ es claramente cíclico y simétrico respecto de AP, al ser $AB'=AC'$ y $PB'=PC'$ por ser P un punto de la bisectriz del lado AB, y ya que $\angle AB'P=\angle AC'P=90°$. Por lo tanto, $\angle B'PC'=180°-A$. Denotemos ahora $Q=PA'\cap B'C'$, con lo que al ser PA' perpendicular a BC, y $B'C'$ perpendicular a la bisectriz AP, el ángulo formado por PA' y $B'C'$ es igual al ángulo formado por AP y BC, es decir, $C+A/2$. Además, al ser claramente $B'PC'$ isósceles en P, se tiene también que

$\angle PB'Q=\angle PB'C'=\angle PC'Q=\angle PC'B'=A/2$. Obtenemos entonces que

$\angle QPB' = C$, $\angle QPC' = B$.

Aplicando el teorema de los senos a los triángulos QPB' y QPC', y a los triángulos QAB' y QAC',, tenemos que

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\dfrac{QP \sin\angle QPB'}{\sin\angle QB'P}}{\dfrac{QP \sin\angle QPC'}{\sin\angle QC'P}} = \frac{QB'}{QC'} = \frac{\dfrac{AQ \sin\angle QAB'}{\sin\angle AB'Q}}{\dfrac{AQ \sin\angle QAC'}{\sin\angle AC'Q}} = \frac{\sin\angle QAB'}{\sin\angle QAC'}.$$

Finalmente, aplicando el teorema del seno a los triángulos AMB y AMC, se tiene

$$\frac{\sin\angle MAB}{\sin\angle MAC} = \frac{\dfrac{MB \sin\angle ABM}{AM}}{\dfrac{MC \sin\angle ACM}{AM}} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin\angle QAC'}{\sin\angle QAB'} = \frac{\sin\angle QAB}{\sin\angle QAC},$$

luego M y Q están sobre la misma recta desde A, es decir, el punto de corte de PA' y $B'C'$ está sobre la mediana AM.

PROBLEMA 6

Sea p un número primo y A un subconjunto infinito de los números naturales. Sea $f_A(n)$ el número de soluciones distintas de la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_p = n,$ con $x_1, x_2, ..., x_p \in A.$ ¿Existe algún número natural N tal que $f_A(n)$ sea constante para todo $n > N$?

Solución:
Para demostrar el enunciado procederemos por contradicción. Supongamos que existe un número N para el que se cumpla la propiedad anterior. Como el conjunto A es infinito, tomemos $a \in A$ mayor que N. Vamos a estudiar el valor de $f_A(pa)$ y $f_A(pa+1)$. Por hipótesis, se cumple que $f_A(pa) = f_A(pa+1)$.
Sea $S = (s_1, s_2, ..., s_p)$ solución de la ecuación

$$x_1 + x_2 + ... + x_p = n, \quad s_1, s_2, ..., s_p \in A.$$

Entonces, cualquier permutación de los índices da lugar a una nueva solución de la ecuación (posiblemente repetida si se permutan valores iguales). Diremos que una solución $S = (s_1, s_2, ..., s_p)$ es asociada a una solución $S' = (s'_1, s'_2, ..., s'_p)$ si la primera se obtiene a partir de la segunda mediante permutación de índices. Sea $S = (s_1, s_2, ..., s_p)$ una solución del problema y sea $Q = (q_1, q_2, ...q_p)$ una solución asociada a S con la propiedad que $q_1 = q_2 = ... = q_{r_1} \neq q_{r_1+1}, \quad q_{r_1+1} = q_{r_2+2} = ... = q_{r_1+r_2}$,
y así de manera sucesiva hasta llegar a $q_{r_1+r_2+...+r_k} = q_p$. En otras palabras, Q se obtiene a partir de S agrupando los valores s_i que son iguales. En particular, $r_1 + r_2 + ... + r_p = p.$
Con esta notación, el número de soluciones asociadas a S (contando también S) es igual a $\dfrac{p!}{r_1! r_2! ... r_k!}$.
Obsérvese que si todos los r_i son estrictamente menores que p, entonces dicha expresión es congruente con 0 módulo p, puesto que el cociente de factoriales es un número natural y en el denominador no hay ningún término múltiplo de p.
Ya tenemos todas las herramientas que necesitábamos. Volviendo al problema original, observar que $\underbrace{(a, a, ..., a)}_{p}$ es solución de $x_1 + x_2 + ... + x_p = pa.$
Por lo tanto $f_A(pa) \equiv 1 (mód\ p)$: la solución $\underbrace{(a, a, ..., a)}_{p}$ no se asocia a ninguna otra, mientras que cualquier otra solución de la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_p = pa$ tiene un número múltiplo de p de asociadas. Por otro lado no existen soluciones de $x_1 + x_2 + ... + x_p = pa + 1$ con todas las x_i iguales (su valor tendría que ser $a + 1/p$), con lo que según lo anterior $f_A(pa+1) \equiv 0 (mód\ p)$ y llegamos a una contradicción.