Fase Nacional de la XLV Olimpiada Matemática Española
Sant Feliu de Guixols (Girona), 27 de marzo de 2009

PRIMERA SESIÓN
SOLUCIONES

1.- Halla todas las sucesiones finitas de n números naturales consecutivos $a_1, a_2, \dots, a_n$, con $n \geq 3$, tales que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2009$.

Primera solución:

Supongamos que N es la suma de n números naturales consecutivos empezando por $k+1$. Entonces

$$N = (k+1)+(k+2)+\dots+(k+n) =$$
$$\left[1+2+\dots+k+(k+1)+\dots+(k+n)\right]-\left[1+2+\dots+k\right]=$$
$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(2k+n+1)}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $2009 = 1\times 2009 = 7\times 287 = 49\times 41$ se tienen los siguientes casos:

(1) Si $n = 7$ y $\dfrac{(2k+n+1)}{2} = 287$ resulta $k = 283$ con lo que
$2009 = 284+285+286+287+288+289+290.$

(2) Si $\dfrac{n}{2} = 7$ y $2k+n+1 = 287,$ resulta $k = 136$ con lo que
$2009 = 137+138+\dots+150.$

(3) Si $n = 41$ y $\dfrac{(2k+n+1)}{2} = 49$ resulta $k = 28$ con lo que
$2009 = 29+30+31+\dots+69.$

(4) Si $n = 49$ y $\dfrac{(2k+n+1)}{2} = 41$ resulta $k = 16$ con lo que
$2009 = 17+18+19+\dots+65.$

(5) Los otros casos dan valores de k que no verifican el enunciado.

Segunda solución:

Claramente, es $a_n = a_1 + n - 1,$ de donde $2009 = n\,a_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}.$ Entonces $2009 \geq \dfrac{n(n-1)}{2} > \dfrac{(n-1)^2}{2}$, luego $n - 1 < \sqrt{4018},$ y al ser $64^2 = 4096 > 4018 > 3969 = 63^2,$ resulta que $\sqrt{4018} < 64,$ con lo que $n < 65.$

Supongamos en primer lugar que n es impar. Entonces, obviamente n divide a $2009 = 7^2 \times 41$ y n puede tomar los valores $7, 41$ ó $49,$ pues cualquier otro divisor impar de 2009 es mayor o igual que $7 \times 41 = 287.$ Se obtiene entonces $a_1 = \dfrac{2009}{n} - \dfrac{n-1}{2},$ con valores respectivos $284, 29$ y $17,$ es decir, se obtienen las tres sucesiones

$$284, 285, ..., 290;$$
$$29, 30, ..., 69;$$
$$17, 18, ..., 65.$$

No hay otras sucesiones con un número impar de términos.

Supongamos finalmente que n es par. Entonces $\dfrac{n}{2}$ divide a $2009,$ con lo que $n = 14,$ ya que cualquier otro valor de n ha de ser mayor o igual que $2 \times 41 = 82 > 65,$ lo que no es posible. Entonces $a_1 = 137,$ y la única sucesión con número par de términos es $137, 138, ..., 150.$

2.- Sean ABC un triángulo acutángulo, I el centro del círculo inscrito en el triángulo ABC, r su radio y R el radio del círculo circunscrito al triángulo ABC. Se traza la altura $AD = h_a$, con D perteneciente al lado BC. Demuestra que

$$DI^2 = (2R - h_a)(h_a - 2r).$$

Primera solución:

Sean E y M las proyecciones ortogonales de I sobre BC y $AD,$ respectivamente.

Se tiene: $AI = \dfrac{r}{sen\frac{A}{2}};\quad r = \dfrac{S}{p} \Rightarrow AI = \dfrac{S}{p \cdot sen\frac{A}{2}}$ (1) donde, evidentemente, S es el área del triángulo ABC y p es su semiperímetro.

Por otra parte, $S = \dfrac{bc \cdot senA}{2} = bc \cdot sen\dfrac{A}{2} \cdot \cos\dfrac{A}{2},$ así que (1) se puede escribir como $AI = \dfrac{bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{p},$ y ya que $\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{p(p-a)}{bc},$ obtenemos $AI^2 = \dfrac{bc(p-a)}{p}$ (2).

Teniendo en cuenta que $bc = 2R \cdot h_a$, $p = \dfrac{S}{r}$, $a = \dfrac{2S}{h_a}$, la expresión (2) se escribe como $AI^2 = 2R \cdot h_a \left(1 - \dfrac{\frac{2S}{h_a}}{\frac{S}{r}}\right) = 2R \cdot h_a \left(1 - \dfrac{2r}{h_a}\right) = 2R(h_a - 2r)$ (3).

Como el cuadrilátero $IEDM$ es un rectángulo, $MD = IE = r$. Aplicando el teorema de Pitágoras generalizado a ADI tenemos

$$DI^2 = h_a^2 + AI^2 - 2h_a \cdot AM \Leftrightarrow DI^2 = h_a^2 + AI^2 - 2h_a(h_a - MD),$$

y teniendo en cuenta los resultados anteriormente obtenidos resulta, finalmente, $DI^2 = h_a^2 + 2R(h_a - 2r) - 2h_a(h_a - r) = (2R - h_a)(h_a - 2r)$, c.q.d.

Segunda solución:

Sean a, b, c las longitudes de los lados BC, CA y AB respectivamente, y sea T el punto donde la circunferencia inscrita es tangente al lado BC. Por el teorema de Pitágoras, al ser $IT \,//\, AD \perp DT$, se tiene que $DI^2 = r^2 + DT^2 = r^2 + AT^2 - AD^2$ y la igualdad a demostrar es equivalente a $AT^2 + 4Rr + r^2 = 2(R + r)h_a$.

Ahora bien, llamando S al área de ABC, es conocido que $S = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{r(a+b+c)}{2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = \dfrac{a\,h_a}{2}$.

De aquí se deduce que $4Rr = \dfrac{2abc}{a+b+c}$, $r^2 = \dfrac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}$, $2R\,h_a = bc$ y $2R\,h_a = \dfrac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2a}$.

Obsérvese que $4Rr + r^2 = \dfrac{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2}{4}$. Ahora bien, se sabe que $BT = \dfrac{c+a-b}{2}$, $CT = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Por el teorema de Stewart, tenemos que

$$AT^2 = \frac{BT \cdot AC^2 + CT \cdot AB^2}{BC} - BT \cdot CT =$$

$$\frac{3b^2 + 3c^2 - a^2 - 2bc}{4} - \frac{(b-c)^2(b+c)}{2a}$$

con lo que

$$AT^2 + 4Rr + r^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + ab + ca}{2} = \frac{(b-c)^2(b+c)}{2a},$$

e identificando términos se comprueba que esto coincide con el valor de

$$2(R + r)h_a$$

y de este modo la igualdad requerida queda demostrada.

Tercera solución:

Nótese en primer lugar que

$$h_a - 2r = \frac{2S - 2ar}{a} = \frac{(b+c-a)\,r}{a} = \frac{2r\,sen\frac{B}{2}\,sen\frac{C}{2}}{sen\frac{A}{2}} = \frac{r^2}{2R\,sen^2\frac{A}{2}} = \frac{IA^2}{2R},$$

donde S es el área de ABC y se ha utilizado que $r = 4R\,sen\frac{A}{2}\,sen\frac{B}{2}\,sen\frac{C}{2}$. Sea ahora el punto P en el que la paralela a BC por I corta a la altura AD. Claramente, $DI^2 = r^2 + IA^2 - (h_a - r)^2 = IA^2 - h_a(h_a - 2r) = (2R - h_a)(h_a - 2r)$.

3.- Se pintan de rojo algunas de las aristas de un poliedro regular. Se dice que una coloración de este tipo es *buena*, si para cada vértice del poliedro, existe una arista que concurre en dicho vértice y no está pintada de rojo. Por otra parte, se dice que una coloración donde se pintan de rojo algunas de las aristas de un poliedro regular es *completamente buena*, si además de ser *buena*, ninguna cara del poliedro tiene todas sus aristas pintadas de rojo. ¿Para qué poliedros regulares es igual el número máximo de aristas que se pueden pintar en una coloración *buena* y en una *completamente buena*? Justifica la respuesta.

Solución:

Claramente, las coloraciones *completamente buenas* son un subconjunto de las coloraciones *buenas,* con lo que si el máximo número de aristas que se pueden pintar de rojo para obtener una coloración *buena* se puede alcanzar con una coloración *completamente buena*, la pregunta del enunciado tiene respuesta afirmativa.

NOTA: En cada caso véase el recuadro de las figuras al final de la solución.

En el caso de un tetraedro, existen 6 aristas, tales que en cada vértice confluyen 3 de ellas. El número máximo de aristas pintadas de rojo en una coloración *buena* sería por lo tanto $\frac{2}{3} \times 6 = 4,$ pues en caso contrario existiría algún vértice donde más de $\frac{2}{3}$ de las aristas estuvieran pintadas de rojo, es decir, todas las aristas estarían pintadas de rojo. La figura muestra una coloración *completamente buena* de un tetraedro con 4 aristas rojas (el tetraedro ha sido deformado para poder ser dibujado en el plano).

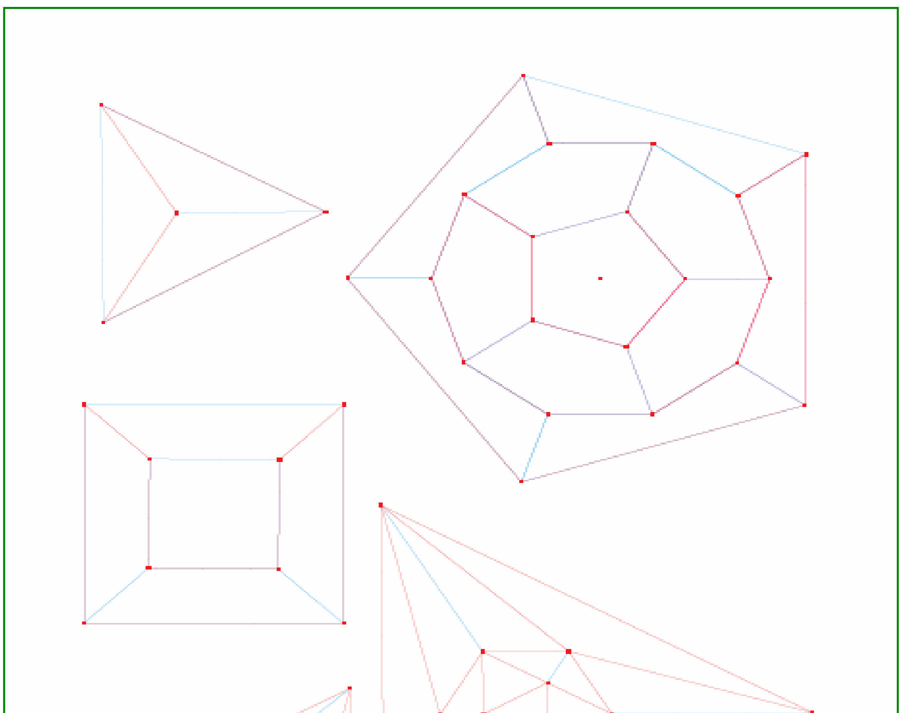
De igual forma, en el cubo existen 12 aristas, tales que en cada vértice confluyen 3 de ellas. El número máximo de aristas pintadas de rojo en una coloración *buena* sería, por lo tanto, $\frac{2}{3} \times 12 = 8.$ La figura muestra una coloración *completamente buena* con 8 aristas rojas.

Finalmente, en el dodecaedro existen 30 aristas, tales que en cada vértice confluyen 3 de ellas. El número máximo de aristas pintadas de rojo en una coloración *buena* sería, por lo tanto, $\frac{2}{3}\times 30 = 20$. La figura muestra una coloración *completamente buena* de un dodecaedro con 12 aristas rojas.

De lo anterior se deduce que para el tetraedro, el cubo y el dodecaedro, el número máximo de aristas rojas en una coloración *buena* se alcanza con una coloración *completamente buena*.
En el octaedro existen 12 aristas, tales que en cada vértice confluyen 4 de ellas. El número máximo de aristas pintadas de rojo en una coloración *buena* es por lo tanto $\frac{3}{4}\times 12 = 9$. La figura muestra una coloración *buena* de un octaedro con 9 aristas rojas. Ahora bien, como cada arista pertenece a dos caras, sumando para las 8 caras el número de aristas pintadas de rojo en dicha cara, obtenemos $18 = 2\times 8 + 2$, con lo que hay, al menos, dos caras con 3 aristas pintadas de rojo y una coloración *buena* con el número máximo de 9 aristas pintadas de rojo nunca puede ser *completamente buena*.
Finalmente, en el icosaedro existen 30 aristas, tales que en cada vértice confluyen 5 de ellas. El número máximo de aristas pintadas de rojo en una coloración *buena* es por lo tanto $\frac{4}{5}\times 30 = 24$. La figura muestra una coloración *buena* de un icosaedro con 24 aristas rojas. Ahora bien, eso quiere decir, que sumando el número de aristas rojas de cada cara para todas las caras, obtenemos $48 = 2\times 20 + 8$, es decir, existen, al menos, 8 caras con todas sus aristas rojas, y una coloración *buena* con el número máximo de 24 aristas pintadas de rojo nunca puede ser *completamente buena*.

Por lo tanto, los poliedros regulares que tienen la propiedad descrita en el enunciado son el tetraedro, el cubo y el dodecaedro (es decir, los poliedros tales que en cada vértice confluyen exactamente 3 aristas) y los que no la tienen son el octaedro e icosaedro (en cuyos vértices confluyen más de 3 aristas).

FIGURAS



Fase Nacional de la XLV Olimpiada Matemática Española

Sant Feliu de Guixols (Girona), 28 de marzo de 2009

SEGUNDA SESIÓN

SOLUCIONES

4.- Determina justificadamente todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009.$

Solución:

Dada una solución (x, y) cualquiera, es claro que también son soluciones $(x, -y), (-x, y)$ y $(-x, -y)$, con lo que se puede asumir sin pérdida de generalidad que $x, y \geq 0$. Supongamos entonces que es así. Es claro que $(x - y^2)(x + y^2) = 7^2 \cdot 41$.

Si $x - y^2$ y $x + y^2$ no son primos entre sí, su máximo común divisor al cuadrado divide a $2009 = 7^2 \cdot 41$, luego es 7 y divide a $(x + y^2) + (x - y^2) = 2x$ y a $(x + y^2) - (x - y^2) = 2y^2$, con lo que existen enteros no negativos u y v tales que $x = 7u,\ y = 7v$ y $(u + 7v^2)(u - 7v^2) = 41.$ Como ambos factores han de ser enteros, se tiene que $u + 7v^2 = 41$ y $u - 7v^2 = 1$, con lo que $u = 21$ y $v^2 = \frac{10}{7}$. No existen pues soluciones enteras en este caso.

Si $x - y^2$ y $x + y^2$ son primos entre sí, un posible caso es que $x - y^2 = 1$ y $x + y^2 = 2009$, con lo que $y^2 = 1004$, absurdo pues $31^2 = 961 < 1004 < 32^2$. Resta entonces tan sólo el caso en que $x - y^2 = 41$ y $x + y^2 = 49$, que produce $x = 45,\ y^2 = 4$, con lo que la única solución con enteros no negativos es $x = 45$ e $y = 2$, y las únicas soluciones en enteros son $(x, y) = (\pm 45, \pm 2)$.

5.- Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba la desigualdad siguiente

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

Primera solución:

Como $abc=1$, entonces $\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2=\left(\frac{ca}{abc+c}\right)^2=\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2$. Análogamente se obtienen $\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2=\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2$ y $\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2=\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2$. Por tanto la desigualdad requerida se convierte en

$\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\geq\frac{3}{4}$, equivalente a

$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right]}\geq\frac{1}{2}.$

Usando hora la desigualdad aritmética- cuadrática, se obtiene

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right]}\geq\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)+\left(\frac{bc}{1+b}\right)+\left(\frac{ca}{1+c}\right)\right].$$

Así es suficiente demostrar que $\frac{ab}{1+a}+\frac{bc}{1+b}+\frac{ca}{1+c}\geq\frac{3}{2}$ o equivalentemente $\frac{abc}{c(1+a)}+\frac{abc}{a(1+b)}+\frac{abc}{b(1+c)}\geq\frac{3}{2}$, que a su vez equivale a que

$$\frac{1}{c(1+a)}+\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}\geq\frac{3}{2}.$$

Poniendo $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}$ y $c=\frac{z}{x}$ en la última desigualdad resulta $\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right)^{-1}\geq\frac{3}{2}$. Sustituyendo ahora $\alpha=\frac{1}{x},\beta=\frac{1}{y}$ y $\gamma=\frac{1}{z}$, se llega a la desigualdad de Nessbit $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}$.

La igualdad se alcanza si y sólo si $a=b=c=1$.

Segunda solución:

Como en la primera solución, probaremos la desigualdad más fuerte $\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$, después de aplicar a la desigualdad del enunciado la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática. Para cualquier número real positivo x se definen los reales positivos $y=\frac{x}{c}$ y $z=bx$, tales que

$a = \dfrac{y}{z}, b = \dfrac{z}{x}$ y $c = \dfrac{x}{y}.$ Denotamos ahora $u = yz,\ v = zx,\ w = xy,$ que obviamente son positivos, obteniendo $\dfrac{a}{1+ab} = \dfrac{xy}{yz+zx} = \dfrac{w}{u+v}$ y sus expresiones análogas por permutaciones circulares. De este modo, es suficiente probar

$$\frac{3}{2} \le \frac{w}{u+v} + \frac{u}{v+w} + \frac{v}{v+u} = (u+v+w)\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{v+w} + \frac{1}{w+u}\right) - 3,$$

que es equivalente a

$$\frac{3}{\dfrac{1}{u+v} + \dfrac{1}{v+w} + \dfrac{1}{w+u}} \le \frac{2u+2v+2w}{3},$$

que es cierto porque es la desigualdad entre la media aritmética y armónica aplicada a los números $u+v, v+w$ y $w+u.$ La desigualdad se alcanza si y sólo si $u = v = w,$ es decir $x = y = z$ ó $a = b = c = 1.$

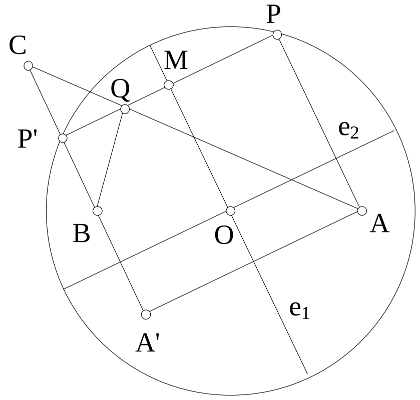
6.- En el interior de una circunferencia de centro O y radio $r,$ se toman dos puntos A y $B,$ simétricos respecto de $O.$ Se considera un punto variable P sobre esta circunferencia y se traza la cuerda $PP',$ perpendicular a $AP.$ Sea C el punto simétrico de B respecto de $PP'.$ Halla el lugar geométrico del punto $Q,$ intersección de PP' con $AC,$ al variar P sobre la circunferencia.

Primera solución:

Establezcamos primero que AC es constante.

<u>Método 1.</u>

Se obtiene C a partir de A aplicando un giro de 180º con centro en O seguido de la simetría de eje $PP'.$



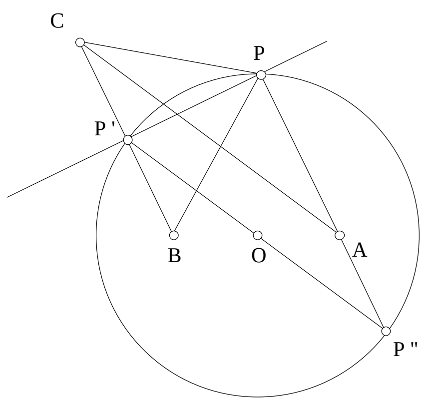
Descomponiendo el giro en producto de dos simetrías de ejes perpendiculares e_1 paralelo a AP y e_2 perpendicular a $AP,$ resulta que el triángulo $AA'C$ es rectángulo en A' y además: $A'C = 2OM;\ AA' = 2MP,$

de donde $AC^2 = 4OM^2 + 4MP^2 = 4OP^2 = 4r^2;$

es decir $AC = 2r,$ con independencia de la posición de $P.$

<u>Método 2</u>

Prolongamos PA hasta que corte de nuevo a la circunferencia en $P''.$ Se tiene $CP' = P'B = AP''.$



Además $P'B$ es paralelo a PP''; luego el segmento CA es la imagen del segmento $P'P''$ mediante la traslación de vector $\overrightarrow{P''A}$P y como $\angle P'PP''$ es recto y $P'P''$ es un diámetro, resulta $AC = P'P'' = 2r$.
Finalmente, al ser PP' la mediatriz de BC, $QC = QB$ y QC = QB; se deduce entonces que $QB + QA = QC + QA = AC = 2r$ y Q describe la elipse de focos A y B y constante $2r$. La recta PP' es la tangente en Q a la elipse.

Segunda solución:

Tomamos $r = 1$ y unos ejes de coordenadas en los que la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$, y las coordenadas de $A(a,0)$, $B(-a,0)$, con $0 < a < 1$.
En vez de empezar por P, sea $P'(x_0, y_0)$ con la condición $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Por las condiciones del problema, P' es el punto medio de BC; llamando x_1, y_1 a las coordenadas de C, se tiene $\begin{cases} x_1 = 2x_0 + a \\ y_1 = 2y_0 \end{cases}$. Entonces la ecuación de la recta CA es $y = \dfrac{y_0}{x_0}(x - a)$, es decir $x_0 y - y_0 x + y_0 a = 0$.

Las pendientes de $P'B$ y de $P'P$ son respectivamente $\dfrac{y_0}{x_0 + a}$ y $-\dfrac{x_0 + a}{y_0}$. Por tanto la ecuación de $P'P$ es $y_0 y + x(x_0 + a) - ax_0 + 1 = 0$.
Las coordenadas del punto Q, intersección de AC y $P'P$ son: $Q\left(\dfrac{x_0 + a}{1 + x_0 a}, \dfrac{y_0(1 - a^2)}{1 + x_0 a}\right)$. Denotando por x, y a las coordenadas de Q y despejando los valores de x_0 e y_0 se obtiene $x_0 = \dfrac{a - x}{ax - 1}$, $y_0 = \dfrac{-y}{ax - 1}$. Imponiendo ahora la condición $x_0^2 + y_0^2 = 1$, se llega a $\dfrac{(a - x)^2}{(ax - 1)^2} + \dfrac{y^2}{(ax - 1)^2} = 1$

y mediante operaciones se transforma en la ecuación $x^2 + \dfrac{y^2}{1 - a^2} = 1$, que es la ecuación de una elipse.

Tercera solución:

Demostraremos en primer lugar que, dados dos puntos A, B del plano, el conjunto de los puntos P (del mismo plano) tales que $PA^2 + PB^2$ es constante y mayor que AB^2, es una circunferencia de centro el punto medio de AB y que tiene a los puntos A y B en su interior.
En efecto, supongamos $A = (d,0)$, $B = (-d,0)$ y sea $P = (x, y)$ cualquier punto. Se tiene entonces

$$PA^2 + PB^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2d^2.$$

Así que si $PA^2 + PB^2 = k \geq 4d^2$, se tiene que $x^2 + y^2 = \dfrac{k}{2} - d^2 \geq d^2$.

Sea entonces ahora R el punto donde BC corta a PP' (que es perpendicular a BC). Este punto R satisface

$$PR^2 = BP^2 - BR^2 = AR^2 - AP^2,$$

luego R está en la circunferencia y es distinto de P, con lo que $R = P'$.

Ahora bien, se tiene

$$AP \cdot BP' = \frac{AP^2 + BP'^2 - (AP - BP')^2}{2} = \frac{k - PP'^2 - (AP - BP')^2}{2} = \frac{k - AB^2}{2},$$

donde $k = AP^2 + BP^2 = AP'^2 + BP'^2$.

Además, la potencia de A respecto de la circunferencia es

$$r^2 - d^2 = \frac{k}{2} - 2d^2 = \frac{k - AB^2}{2},$$

con lo que el segundo punto S en el que AP corta a la circunferencia es tal que $AS = BP' = CP'$.

Como $CP' \perp PP' \perp AP$, se tiene que AS es paralelo a CP' y $ASP'C$ es un paralelogramo.

Finalmente,

$$PP'^2 + PS^2 = AP'^2 + AS^2 + 2 \cdot AS \cdot AP = AP'^2 + BP'^2 + k - AB^2 = 2k - 4d^2 = 4r^2,$$

es decir, $P'S = AC = 2r$. Como $AQ + BQ = AC = 2r$, el lugar de Q es la elipse interiormente tangente a la circunferencia dada, con A y B como focos.